



TITLE:

WITTデザインに関連したハイパー  
グラフの構成について(組合せデザ  
インとその周辺における数理的基  
礎およびそれらの応用)

AUTHOR(S):

徳重, 典英

---

CITATION:

徳重, 典英. WITTデザインに関連したハイパーグラフの構成について  
(組合せデザインとその周辺における数理的基礎およびそれらの応用).  
数理解析研究所講究録 2006, 1465: 57-64

ISSUE DATE:

2006-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/48035>

RIGHT:

# WITT デザインに関連したハイパーグラフの構成について

徳重典英 (NORIHIDE TOKUSHIGE)

琉球大学教育学部 (COLLEGE OF EDUCATION, RYUKYU UNIVERSITY)

ABSTRACT. ハイパーグラフ  $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{12}$  が任意の相異なる二辺  $F, F' \in \mathcal{F}$  について  $|F \cap F'| \in \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$  をみたすとき、そのサイズ (辺数) はどのくらい大きくできるか? 本稿では  $|\mathcal{F}| = (n/12)^6$  をみたすハイパーグラフの構成、および関連する話題について紹介する。

## 1. $L$ -SYSTEM とその EXPONENT

自然数  $k$  と  $L \subset \{0, 1, \dots, k-1\}$  を固定する。ハイパーグラフ  $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$  が  $(k, L)$ -system であるとは、任意の相異なる二辺  $F, F' \in \mathcal{F}$  が

$$|F \cap F'| \in L$$

を満たすことをいう。 $n$  点上の  $(k, L)$ -systems の最大サイズを  $m(n, k, L)$  とかく。本稿では  $n$  が増大するときの  $n$  の関数としての  $m(n, k, L)$  の振舞いに注目する。

$k$  と  $L$  のみに依存する正定数  $\alpha, c, c', n_0$  があつて

$$n > n_0 \text{ ならば } cn^\alpha < m(n, k, L) < c'n^\alpha$$

が成立つとき、この  $(k, L)$ -system の exponent は  $\alpha$  であるといい  $\alpha(k, L) = \alpha$  とかく。任意の  $k, L$  に対して  $\alpha(k, L)$  は存在するか? という基本的な問題は未解決であるが、以下では exponent が存在する  $(k, L)$  のみを扱う。なお、任意の  $1 \leq q \in \mathbb{Q}$  に対して、 $\alpha(k, L) = q$  をみたす  $(k, L)$  は無限個ある [8] が、無理数の exponent をもつ  $(k, L)$  の例はひとつも知られていない。

Frankl, 太田らは [9] で  $k \leq 12$  の場合の  $\alpha(k, L)$  の決定を試み、全部で  $\sum_{k=2}^{12} 2^{k-1} = 4094$  種類の  $(k, L)$ -systems のうち、4058 種類について決定した。本質的には  $(11, \{0, 1, 2, 3, 5\})$  および  $(12, \{0, 1, 2, 3, 4, 6\})$  が未解決のパラメタとして残った。これらは Witt デザインと密接な関係がある。[16] では  $\alpha(12, \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}) = 6$  を示し、未解決であつた 36 の

Date: November 1, 2005.

2000 Mathematics Subject Classification. Primary: 05D05 Secondary: 05B05.

Key words and phrases. Witt design; Seiner system;  $L$ -system; intersection structure.

The author was supported by MEXT Grant-in-Aid for Scientific Research (B) 16340027.

exponents をすべて決定した。本稿ではこれらの exponents に関連する構成法および周辺の話題について、主に組合せ論的な側面から解説する。

はじめに  $m(n, k, L)$  の評価に関する基本的な結果を紹介する。

**Theorem 1** (Deza–Erdős–Frankl[5]).  $n > n_0(k)$  に対し、

$$m(n, k, L) \leq \prod_{l \in L} \frac{n-l}{k-l} (\approx cn^{|L|}).$$

上の結果は等号を成立させる  $(n, k, L)$  が無限にある。

**Theorem 2** (Rödl[14]).  $k, t$  を固定して、 $n$  が増大するとき

$$m(n, k, \{0, 1, \dots, t-1\}) = (1 - o(1)) \binom{n}{t} / \binom{k}{t}.$$

$\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$  が  $(k, \{0, 1, \dots, t-1\})$ -system ならば、任意の  $t$  点集合  $T \subset [n]$  に対し、 $T \subset F \in \mathcal{F}$  をみたす  $F$  は「高々」ひとつである。この「高々」を「ちょうど」に置換えたものは Steiner system  $S(t, k, n)$  であり、この場合には  $|\mathcal{F}| = \binom{n}{t} / \binom{k}{t}$  である。即ち、

$$m(n, k, \{0, 1, \dots, t-1\}) \leq \binom{n}{t} / \binom{k}{t}$$

は自明な上界で、等号は Steiner system が存在するときに限り成立する。Steiner system はパラメタ  $(t, k, n)$  が特別な関係を満たす場合にしか存在しないが、 $k, t$  を固定して  $n$  が十分大きいときには、Steiner system に近いサイズを持つ  $(k, \{0, 1, \dots, t-1\})$ -system がいつでも作れるというのが上の定理の主張である。証明はいわゆる Rödl nibble とよばれる確率論的手法（例えば [1] の 4.7 節参照）を用いる。

上の二つの定理から、正定数  $c, c'$  が存在して  $n$  が十分大きいとき

$$cn^5 \leq m(n, 12, \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}) \leq c'n^6$$

が成立つ。次節では Witt デザインを利用した構成法により下界を  $cn^6$  に改善しよう。

## 2. 行列を利用した構成

簡単な例から始めよう。 $(7, \{0, 1, 3\})$ -system を構成するために、 $\mathbb{F}_2$  上の  $3 \times 7$  行列  $A$  を次で定める。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

この行列は次の二つの性質を持っている。

- (1) どの二列も  $\mathbb{F}_2$  上線形独立。

- (2)  $A$  のどの二列  $c_p, c_q$  についても、この二列が張る部分空間は  $A$  のちょうど三列  $c_p, c_q$  および  $c_r$  を含む。実際  $c_r = c_p + c_q$ .

そこで2次元空間を張る3本の列ベクトルの列番号を並べて

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & 2 & & 4 & & \\ & 1 & & 3 & & 5 & \\ 1 & & & & & & 6 & 7 \\ & 2 & 3 & & & & 6 & \\ & 2 & & & 5 & & & 7 \\ & & 3 & 4 & & & & 7 \\ & & & 4 & 5 & 6 & & \end{array}$$

Steiner system  $S(2, 3, 7)$  あるいは Fano 平面が得られる。行列  $A$  を使って 7-partite  $(7, \{0, 1, 3\})$ -system  $\mathcal{F}$  を次のように定義しよう。

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \{(a, b, c)A : a, b, c \in \mathbb{F}_2^d\} \\ &= \{(a, b, c, a+b, a+c, b+c, a+b+c) : a, b, c \in \mathbb{F}_2^d\}. \end{aligned}$$

$\mathcal{F}$  の頂点集合は7個の部集合からなり、各部集合は  $d$  次元空間  $\mathbb{F}_2^d$  のコピーとする。従って頂点数は  $n = |V(\mathcal{F})| = 7 \times 2^d$  である。 $\mathcal{F}$  の辺は3本のベクトル  $(a, b, c)$  によって指定されるから  $|\mathcal{F}| = (2^d)^3 = (n/7)^3$  である。

$\mathcal{F}$  が  $L = \{0, 1, 3\}$ -system であることは、行列  $A$  の持つ二つの性質から保障される。 $\mathcal{F}$  から二辺  $F = (a, b, c)A, F' = (a', b', c')A$  をとり、その交わりを調べよう。この二辺が（少なくとも）2点で交わったとする。それが例えば1番目と2番目の部集合上であったとすると、 $a = a', b = b'$  であるが、このとき  $a + b = a' + b'$  であるから4番目の部集合上でもこの二辺は交わる。従ってちょうど2点で交わることは不可能である。次に二辺が（少なくとも）4点で交わったとする。このときその4つの部集合に対応する行列  $A$  の4列の rank は3だから、対応する連立方程式が解けて  $a = a', b = b', c = c'$  すなわち  $F = F'$  でなければならない。

以上を踏まえて、 $(t, b, k)_q$  行列を定義しよう。これは  $\mathbb{F}_q$  上の  $(t+1) \times k$  行列で次の二つの性質を持つものとする。

- (1) どの  $t$  列も  $\mathbb{F}_q$  上線形独立。
- (2) どの  $t$  列が張る  $t$  次元部分空間も  $A$  の列ベクトルのうちちょうど  $b$  本を含む。

はじめにあげた行列  $A$  は  $(2, 3, 7)_2$  行列の例である。 $A$  から  $(7, \{0, 1, 3\})$ -system を作ったのと同様にして次のことがわかる。

**Theorem 3** ([16]).  $(t, b, k)_q$  行列が存在するとき、 $L = \{0, 1, \dots, t-1, b\}$  に対して  $m(n, k, L) \geq (n/k)^{t+1}$  である。

そこで  $(12, \{0, 1, 2, 3, 4, 6\})$ -system  $\mathcal{F}$  を構成するには例えば  $(5, 6, 12)_3$  行列を見つけられればよい。実際次の行列はその例である。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ここで

$$\mathcal{F} = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)A : a_i \in \mathbb{F}_3^d\}$$

とおくと、これは  $(12, \{0, 1, 2, 3, 4, 6\})$ -system で

$$n = |V(\mathcal{F})| = 12 \times 3^d, \quad |\mathcal{F}| = (3^d)^6 = (n/12)^6$$

を満たす。

上の行列は  $PG(2, 3)$  を veronese mapping<sup>1</sup> で  $PG(5, 3)$  に埋込み、少し変形<sup>2</sup>して得られる 12 点 (Coxeter[3]) の同次座標を並べたものである。この行列から Steiner system  $S(5, 6, 12)$  あるいは Witt デザイン  $W_{12}$  が作れる。この構成は Havlicek[12] による。さらに上の行列の左端の列と先頭の行を捨てて得られる行列は  $(4, 5, 11)_3$  行列であり、ここから  $(11, \{0, 1, 2, 3, 5\})$ -system で exponent が 5 となるものを構成できる。

上の行列  $A$  は extended ternary Golay code  $G_{12}$  の parity check matrix になっている。もちろん標準的な次の形の parity check matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

も  $(5, 6, 12)_3$  行列である。

上記の構成と、Theorem 1 から次を得る。

#### Theorem 4.

$$\frac{n^6}{2985984} \leq m(n, 12, \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}) \leq \frac{n^6}{570240}.$$

<sup>1</sup> $(x, y, z) \mapsto (x^2, xy, xz, y^2, yz, z^2)$

<sup>2</sup> $PG(2, 3)$  の一本の直線の像は  $PG(5, 3)$  の planar quadrangle  $\Gamma$  になるが、これを捨てて代わりに  $\Gamma$  の diagonal triangle の 3 点に置換える。 $PG(2, 3)$  の像はもともと 13 点あったから、この置換えによって  $13 - 4 + 3 = 12$  点が得られる。



例えば  $S(2,3,7)$  は閉  $\{0,1,3\}$ -system の生成集合である。すなわち  $S(2,3,7)$  の交差閉包  $\mathcal{F} = \binom{[7]}{0} \cup \binom{[7]}{1} \cup \binom{[7]}{2} \cup S(2,3,7)$  は閉  $\{0,1,3\}$ -system である。この  $\mathcal{F}$  は 2 点集合を全部 cover するが 3 点集合の全部は cover しない ( $\mathcal{F}$  には 3 点集合は 7 個しかない) から、 $\text{rank}(\mathcal{F}) = 3$  である。実際  $\text{rank}(7, \{0,1,3\}) = 3$  であり、これを実現するのは  $\mathcal{F}$  のみである。同様に  $\text{rank}(12, \{0,1,2,3,4,6\}) = 6$  であり、rank 6 の閉  $\{0,1,2,3,4,6\}$ -system の生成集合は Witt デザインに限る。

$\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$  とその辺  $F \in \mathcal{F}$  に対して、

$$\mathcal{J}(F, \mathcal{F}) := \{F \cap F' : F' \in \mathcal{F} - \{F\}\} \subset 2^F$$

とおく。さらにもし  $\mathcal{F}$  が  $k$ -partite であって、頂点集合が  $[n] = V_1 \cup \dots \cup V_k$  と部集合に分割されているとき (従ってこのとき  $1 \leq i \leq k$  について  $|F \cap V_i| = 1$  となっていて)、 $I \in \mathcal{J}(F, \mathcal{F})$  の  $[k]$  への射影  $\pi(I)$  を  $\pi(I) := \{i : I \cap V_i \neq \emptyset\} \subset 2^{[k]}$  と定め、 $\pi(\mathcal{J}(F, \mathcal{F})) := \{\pi(I) : I \in \mathcal{J}(F, \mathcal{F})\}$  とおく。次の構造定理は基本的である。

**Theorem 5** (Füredi[10]).  $k \geq 2$  と  $L \subset \{0,1,\dots,k-1\}$  を固定したとき、ある正定数  $c = c(k,L)$  が存在して、任意の  $(k,L)$ -system  $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$  から以下の条件を満たす  $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}$  を取りだせる。ここで  $\mathcal{F}^*$  は分割  $[n] = V_1 \cup \dots \cup V_k$  をもつ  $k$ -partite hypergraph でさらに

- (1)  $|\mathcal{F}^*| > c|\mathcal{F}|$ ,
- (2) 任意の二辺  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}^*$  について  $\pi(\mathcal{J}(F_1, \mathcal{F}^*)) = \pi(\mathcal{J}(F_2, \mathcal{F}^*))$ ,
- (3) 任意の  $F \in \mathcal{F}^*$  について  $\mathcal{J}(F, \mathcal{F}^*)$  は閉  $L$ -system,

となっている。

上の状況が成立つとき、 $\mathcal{J}(F, \mathcal{F}^*)$  を  $\mathcal{F}^*$  の交差構造<sup>3</sup>という。 $(k,L)$ -system の rank と exponent の関係を調べよう。 $(k,L)$  を固定し、 $\alpha(k,L)$  の存在を仮定する。この exponent を達成する  $(k,L)$ -system  $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$  から Theorem 5 を使って  $\mathcal{F}^*$  を取りだす。さらに  $F \in \mathcal{F}^*$  をとり、 $\mathcal{J} = \pi(\mathcal{J}(F, \mathcal{F}^*))$ ,  $t = \text{rank}(\mathcal{J})$  とおく。rank の定義から  $A \notin \Delta_t(\mathcal{J})$  なる  $A \in \binom{[k]}{t}$  がとれる。このとき  $\pi(B) = A$  となるような任意の  $B \in \prod_{a \in A} V_a$  に対して、 $B \subset F$  をみたす  $\mathcal{F}^*$  の辺  $F$  は高々ひとつである。従って  $\mathcal{F}^*$  のサイズは、高々このような  $B$  のとり方の可能性の数、即ち  $\prod_{a \in A} |V_a| = O(n^t)$  しかない。従って

$$\alpha(k,L) \leq \text{rank}(k,L)$$

である。逆に  $\alpha(k,L)$  を  $\text{rank}(k,L)$  を用いて下から評価する一般的な結果は全く知られていない。その意味では次の予想はかなり大胆である。

**Conjecture 1** (Füredi[11]).  $\alpha(k,L) > \text{rank}(k,L) - 1$ .

<sup>3</sup>例えば  $\text{rank}(9, \{0,1,3,4\}) = 3$  であり、rank 3 の閉  $\{0,1,3,4\}$ -system は非同型なものもちょうど 3 種類存在するが、その中のひとつ  $S(2,3,9)$  の交差閉包だけが  $\alpha(9, \{0,1,3,4\}) = 3$  を与える交差構造である [9]。

この予想は  $\text{rank}(k, L) = 2$  のとき正しい。これは  $(k, L)$ -system の構成によって示すことができる [11]。[9] の当初の目論見はこの予想の反例を  $k$  が小さいところ、例えば  $k \leq 12$  の範囲で見つけようというものだったが、[16] に至って結局  $k \leq 12$  の範囲に反例はないことがわかった。

最後に Steiner system を交差構造 (の生成集合) にもつ  $L$ -system について考えてみる。 $t < b < k$  を選び、 $L = \{0, 1, \dots, t-1\} \cup \{b\}$  とおく。まず、Theorem 1 から  $\alpha(k, L) \leq |L| = t+1$  がわかる。ここで Steiner system  $S(t, b, k)$  が存在すると仮定しよう。その交差閉包を  $\mathcal{J} \subset 2^{[k]}$  とすると、これは閉  $L$ -system である。任意の  $T \in \binom{[k]}{t}$  に対し、 $T \subset B$  を満たす  $B \in \mathcal{J}$  がただ一つ定まるから、 $\mathcal{J}$  は  $[k]$  の  $t$  点集合を全部 cover する。しかし  $x \notin T$  とすると  $\{x\} \cup T$  を含む  $\mathcal{J}$  の辺はないから、 $\text{rank}(\mathcal{J}) = t+1$  がわかった。 $\text{rank}(k, L) \geq \text{rank}(\mathcal{J})$  だから、もし上の予想が正しいなら  $\alpha(k, L) > t$  となるはずである。最近 Rödl と Tengan は、実際に  $(k, L)$ -system を構成することで次の結果を得た。

**Theorem 6** (Rödl–Tengan[15]). Steiner system  $S(t, b, k)$  が存在すると仮定し、 $L = \{0, 1, \dots, t-1\} \cup \{b\}$  とおく。このとき  $k, L$  のみに依存する正定数  $\varepsilon$  が存在して、 $\alpha(k, L) \geq t + \varepsilon$  となる。

最後にいくつか問題を挙げます。

- (1) 任意の  $(k, L)$  に対して  $\alpha(k, L)$  が存在することを示せ。
- (2) Füredi の予想は正しいか？
- (3) Theorem 6 の別証明、特に確率論的手法に依らない直接的な構成法を見つけよ。
- (4)  $m(n, 12, \{0, 1, 2, 3, 4, 6\})$  の評価を改善せよ。特に  $n^6$  の係数を決定せよ。
- (5)  $\alpha(24, \{0, 1, 2, 3, 4, 8\})$  を求めよ。これは  $S(5, 8, 24)$  と関連がある。なお、 $5 < \alpha \leq 6$  はわかっている。もし  $(5, 8, 24)_q$  行列が存在すれば  $\alpha = 6$  である。
- (6)  $\alpha(13, \{0, 1, 3\})$  を求めよ。これは  $S(2, 3, 13)$  と関連がある。この Steiner system は非同型な 2 種類があり、そのどちらも対応する  $(2, 3, 13)_q$  行列をもたないことが知られている (Driessen–Frederix–van Lint [7])。なお、 $2 < \alpha \leq 3$  はわかっている。
- (7) Steiner system  $S(t, b, k)$  が存在して  $L = \{0, 1, \dots, t-1\} \cup \{b\}$  のとき、 $t < \alpha(k, L) \leq t+1$  がわかっているが、 $\alpha(k, L) < t+1$  となる例はあるか？
- (8) どんな Steiner system が  $(t, b, k)_q$  行列から作れるのか？

## REFERENCES

- [1] N. Alon, J. H. Spencer. The probabilistic method (second edition). John Wiley & Sons, 2000.



- [2] R. C. Bose. On the application of finite projective geometry for deriving a certain series of balanced Kirkman arrangements. *Golden Jubilee Commemoration Volume (1958–59)*, Calcutta Math. Soc., 341–354, 1959.
  - [3] H. S. M. Coxeter. Twelve points in  $PG(5, 3)$  with 95040 self-transformations. *Proc. Royal Soc. London A*, 427:279–293, 1958.
  - [4] M. Deza. Perfect matroid designs. *Matroid applications*, 54–72, *Encyclopedia Math. Appl.*, 40, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.
  - [5] M. Deza, P. Erdős, P. Frankl. Intersection properties of systems of finite sets. *Proc. London Math. Soc.* (3), 36:369–384, 1978.
  - [6] M. Deza, P. Frankl, J. W. P. Hirschfeld. Sections of varieties over finite fields as large intersection families. *Proc. London Math. Soc.* (3), 50:405–425, 1985.
  - [7] L. M. H. F. Driessen, G. H. M. Frederix, J. H. van Lint. Linear codes supported by Steiner triple systems. *Ars Combinatoria*, 1:33–42, 1976.
  - [8] P. Frankl. All rationals occur as exponents. *J. of Comb. Th. (A)*, 42:200–206, 1985.
  - [9] P. Frankl, K. Ota, N. Tokushige. Exponents of uniform  $L$ -systems. *J. Combin. Theory (A)*, 75:23–43, 1996.
  - [10] Z. Füredi. On finite set-systems whose every intersection is a kernel of a star. *Discrete Math.*, 47:129–132, 1983.
  - [11] Z. Füredi. Turán type problems. In *Surveys in Combinatorics 1991 (LMS Lecture Note Series)*, 166:253–300, 1992.
  - [12] H. Havlicek. The Veronese surface in  $PG(5, 3)$  and Witt’s 5-(12,6,1) Design. *J. Combin. Theory (A)*, 84:87–94, 1998.
  - [13] J. H. van Lint, R. M. Wilson. A course in combinatorics (second edition). Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
  - [14] V. Rödl. On a packing and covering problem. *European J. of Comb.*, 5:69–78, 1985.
  - [15] V. Rödl, E. Tengan. A note on a conjecture by Füredi. manuscript, 2004.
  - [16] N. Tokushige. An  $L$ -system on the small Witt design. *J. Combin. Theory (A)*, in press.
- E-mail address:* hide@edu.u-ryukyu.ac.jp